**Лекція 3: Методи класифікації та прогнозування**

**1. Основні методи прогнозування: класифікація прогнозів**

У класичному менеджменті вважається, що прогнозування — це метод, в якому використовуються як накопичений в минулому досвід, так і поточні припущення відносно майбутнього в цілях його визначення. В результаті отримують картину майбутнього, яку можна використовувати як основу в процесі планування. Прогноз в управлінні являє собою розробку моделей розвитку керованого об'єкта.

Показники прогнозу (числові характеристики об'єкта, обсяги і терміни робіт і т. п.) мають ймовірнісну природу. На основі прогнозів здійснюється передбачення і приймаються управлінські рішення.

**Мета прогнозування** — отримати науково обґрунтовані варіанти тенденцій розвитку (зміни) керованого об'єкта (показників його стану) в часі і просторі. Джерелами інформації для прогнозів являються вербальні і письмові тексти, що отримуються в процесі комунікацій між людьми або у відкритому друці. Інформацію з відкритого друку отримують, використовуючи методи: структурно-морфологічний, визначення публічної активності, виявлення груп патентних документів, аналізу показників, термінологічного і лексичного аналізу, які будуть розглянуті далі.

Для прогнозування в практичній діяльності застосовуються різні кількісні і якісні методи.

**Кількісні методи** базуються на інформації, яку можна отримати, на основі вивчення тенденцій зміни параметрів або маючи статистично достовірні залежності, що характеризують виробничу діяльність об'єкта управління. Як приклади таких методів можуть виступати: аналіз тимчасових рядів, каузальне (причинно-наслідкове) моделювання.

У основу якісних методів покладені експертні оцінки фахівців в сфері прийняття рішень: наприклад, методи експертних оцінок, висновок, моделі очікування споживача (опитування клієнтів).

Складні об'єкти прогнозуються з використанням різних кількісних і якісних методів. Наприклад, прогноз економічної кон'юнктури (сукупність ознак, що характеризують стан економіки в певний період) базується на прогнозах у сфері обмежень по захисту навколишнього середовища, міжнародної торгівлі, попиту на продукцію, пропозиції продукції та їх співвідношень. При цьому кожний з вказаних прогнозів, у свою чергу, ґрунтується на проміжних прогнозах різних процесів. Відпрацьованими методами прогнозування економічної кон'юнктури є: "мозкова атака", метод Дельфі, екстраполяції тенденцій, морфологічний аналіз, імітаційне динамічне моделювання, структурний аналіз і ін. Однак існують і інші класифікації методів прогнозування, які визначені особливостями прогнозів (табл. 13.2).

Цілі, час, умови прогнозу і специфіка його вироблення визначають комплекс методів і прийомів прогнозування. При цьому різні методи можуть використовуватися в розробці різних прогнозів.

Приведемо коротку характеристику методів прогнозування, які використовуються частіше за інших, із вказівкою джерел, в яких їх суть викладена в розгорненому вигляді (табл. 13.3).

Таблиця 13.2

Класифікація прогнозів

|  |  |
| --- | --- |
| Класифікаційний признак | Роль і місце прогнозу в управлінському рішенні |
| цільовий | Визначення можливості реалізації цілі управління. Дозволяє уточнити ціль організації і сформулювати її місію. Визначаються критерії досягнення мети |
| пошуковий | Виявлення закономірних тенденцій у розвитку керованого об'єкта. Встановлення стану прогнозованого об'єкта в сьогоденні і майбутньому. Враховується в процесі розробки стратегічних рішень |
| нормативний | Визначення шляху, етапів реалізації цілей управлінського рішення. На його основі рекомендується використовувати відповідні методи управління: планові, програмні і т. п. |
| програмний | Дослідження впливу чинників на різних етапах досягнення мети організації. Формулювання гіпотези взаємовпливу різних факторів на об'єкт прогнозування і визначення Ймовірнісних термінів досягнення проміжних цілей в процесі досягнення головної |
| проектний | Отримання матеріалу, що забезпечує цільову спрямованість концепцій проектів, їхнього життєвого циклу, критеріїв оцінки інвестиційних проектів. Результати проектного прогнозу використовуються при розробці інвестиційних і фінансових рішень |
| Час (період) упередження | Оперативні, коротко-, середньо- і довгострокові прогнози, спрямовані на забезпечення, розробку, прийняття і реалізацію управлінських рішень: тактичних, оперативних і стратегічних |
| Умови  взаємозв'язку факторів | Прогнози формуються з урахуванням детермінованих, ймовірнісних взаємозв'язків факторів і об'єкта прогнозування, а також невизначених умов. Умови визначають специфіку використання методів прогнозування і розробки прийняття рішення |
| Специфіка обробки інформації особою, що приймає рішення | Моделі прогнозування можуть бути описані за допомогою математичних залежностей (формалізовані, що дозволяють здійснювати прогнозування і прийняття рішення з використанням ЕОМ) або у вигляді письмових або усних текстів. Інформація, що переробляється (усвідомлено або неусві-домлено), визначає назву частини прогнозів і рішень, наприклад як інтуїтивні прогнози |

При вирішенні задач прогнозування і прийняття рішень суттєвою проблемою є кількість і якість обробки необхідної інформації. Нижче наведено декілька методів, що дозволяють особам, що приймають рішення мінімальними матеріальними і організаційними затратами наповнювати інформаційну базу даних.

Таблиця 13.3

Коротка характеристика методів прогнозування

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Область застосування | Призначення, вирішувані задачі | Особливості застосування | Літературне джерело |
| Експертні методи | | | |
| Економічна кон'юнктура. Розв'язання проблем науково-технічного прогресу. Розвиток об'єктів великої складності | Для об'єктів, розвиток яких не піддається предметному опису, математичній формалізації. В умовах відсутності достовірної статистики, що характеризує об'єкт управління, в умовах великої невизначеності, за відсутності ЕОМ, в екстремальних ситуаціях | За експертними оцінками 7-9 фахівців. Вироблення колективної думки групи експертів. Потребує багато часу для опитування і обробки даних. |  |
| Метод евристичного прогнозування | | | |
| Науково-технічні об'єкти і проблеми, розвиток яких погано піддається формалізації | Знаходження оптимальних способів створення проектованих систем (модернізованих). Прогнозування великих і складних систем. Виявлення об'єк-тивізованого уявлення про перспективи розвитку вузької області | Математичний апарат (метод) непридатний. Спеціально обробляються прогнозні оцінки об'єкта шляхом систематизованого опитування експертів у вузькій сфері науки, техніки, виробництва. Інформаційний масив створюється із заповнених експертами таблиць. |  |
| Колективна генерація ідей | | |  |
| Отримання блоку ідей з прогнозування і прийняття рішень | Визначення всього можливого кола варіантів розвитку керованого об'єкта. Визначення альтернативного кола чинників, що впливають на об'єкт прогнозу. Отримання сценарію розвитку об'єкта управління | Синтез об'єкта прогнозу,  мультифакторний аналіз подій, аналіз подій зі сторони детермінуючих чинників |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Морфологічний аналіз | | | |
| В умовах малого обсягу інформації про проблему, що вивчається, для отримання систематизованої інформації по всіх можливих варіантах її рішення | Прогнозування можливого результату фундаментальних досліджень. При відкритті нових ринків, формуванні нових потреб | Структурні взаємозв'язки між об'єктами, явищами і концепціями. Загальність припускає їй використання повної сукупності знань про об'єкт. Необхідною вимогою є повна відсутність попередніх думок. Містить такі етапи: формулювання проблеми; аналіз параметрів; побудова -морфологічного ящика", що включає всі рішення; вивчення всіх рішень |  |
| Прогнозні графи і "дерево рішень" | | | |
| Структурне прогнозування (знаходження розв'язання проблеми при збереженні функцій, але зміною структури об'єкта) | Прогноз розвитку об'єкта в цілому. Формулювання сценарію досягнення прогнозованої мети, рівня мети, критерію | Вибір графи, що визначається сутністю відносин, які вона повинна виразити |  |
| Математичні методи параметричного прогнозування | | | |
| Визначення тенденцій розвитку об'єктів, що мають кількісні статистичні дані, які  характеризують їх минулий і сьогоднішній стан | Задачі прогнозної  екстраполяції | Можуть застосовуватися:  \* за умов, коли вихідні статистичні дані відповідають вимогам, пред'явленим де конкретних математичний методів;  \* за наявності кількісної інформації;  \* якщо значення часу (глибини) упередження укладаються в рамках одного з циклів об'єкта прогнозування  ............... |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Задачі методу найменших квадратів | Застосування можливе, якщо за час упередження функціональна структура об'єкта прогнозування не змінюється (можуть змінюватися тільки значення параметрів) |  |
| Прогноз процесів, динаміка яких містить коливальні або гармонійні складові | Спектральний аналіз | До об'єкта прогнозування відносяться:  • сезонні коливання попиту;  • макроекономічні процеси;  • енергоспоживання |  |
| Максимально можливий облік і сукупності змінних, що характеризують об'єкт і їх взаємозв'язки | Факторний аналіз | Являє собою розділ математичної статистики і включає велику кількість методів |  |
| Прогнозування за аналогією | | | |
| Розв'язання  проблемних ситуацій, звичних для осіб, що 3 приймають рішення | рішення ситуаційних управлінських задач | Використання методу за наявності аналогів об'єктів, процесів, ситуацій. Застосування методу вимагає спеціальних навичок. |  |

**2. Методи класифікації економічної інформації**

|  |
| --- |
| Система класифікації визначається і характеризується використаним методом класифікації, ознаками класифікації (покладеними в основу виділення класифікаційних угруповань), їх послідовністю і кількістю рівнів (ступенів) класифікації, а також кількістю угруповань (ємністю). Загалом ознака класифікації - це властивість об'єкта класифікованої множини. Ознаки класифікації можуть мати кількісне (стаж, оклад, вік) або якісне (професія, посада, галузь) значення. Кількість значень ознаки класифікації визначає кількість класифікаційних угруповань, які можуть бути створені при розподілі множини об'єктів за цією ознакою.  Розрізняють два основні методи класифікації:  1) ієрархічний;  2) фасетний.  Метод класифікації - це по суті сукупність правил створення системи класифікаційних угруповань і їх зв'язки між собою.  Ієрархічний метод класифікації характеризується тим, що початкова множина об'єктів техніко-економічної інформації послідовно поділяється на угруповання (класи) першого рівня поділу, далі - на угруповання наступного рівня І т.ін.  Сукупність угруповань утворює при цьому ієрархічну деревоподібну структуру, яку часто зображають у вигляді розгалуженого (гіллястого) графа; вузлами цього графа с угруповання.  В ієрархічній класифікації в частинному випадку на кожному рівні поділу може бути використана одна ознака. Це означає, що об'єкти початкової множини характеризуються однаковим набором ознак.  При використанні ієрархічного методу класифікації для віднесення конкретного об'єкта класифікації на кожному ступені лише до одного класифікаційного угруповання необхідно додержувати таких основних правил:  • поділ кожного угруповання виконується лише за однією основою поділу;  • здобуті на кожному рівні класифікації угруповання не повинні повторюватися;  • класифікації мають виконуватися так, аби сума частин становила множину, яку поділили.  Найбільш суттєвими і складними питаннями, що постають при використанні ієрархічного методу класифікації, є вибір системи ознак, що стануть основою поділу, а також їх послідовність.  Ієрархічний метод класифікації характеризується кількістю рівнів (ступенів) класифікації, глибиною, ємністю і гнучкістю. Кількість рівнів визначає глибину класифікації, яка встановлюється залежно від міри необхідної конкретизації угруповань і кількості ознак, які беруть участь у розв'язуванні відповідних задач.  Недоліки ієрархічного методу класифікації компенсуються фасетним методом, за якого початкова множина об'єктів може незалежно поділятися на класифікаційні угруповання щоразу з використанням однієї з обраних ознак.  Кожна ознака фасетної класифікації відповідає фасеті, що являє собою список значень найменованої ознаки класифікації. Наприклад, ознака «колір» містить такий список значень: червоний, білий, чорний, блакитний ... зелений; ознака - «професія» містить такий список значень: апаратник, автослюсар ... токар і т. ін. Отже, система класифікації може бути подана переліком незалежних фасетів (списків), які містять значення ознак класифікації. Множинне описання об'єктів техніко-економічної Інформації відбувається в кожній конкретній задачі на основі задання фасетної формули, яка утворюється з послідовності ознак класифікації, використовуваних у задачі. Кількість фасетних формул визначається можливим поєднанням ознак. Для кожної фасетної формули може бути утворена ієрархічна класифікація, в якій на кожному рівні поділу використовується одна ознака, що відповідає окремій фасеті, а послідовність ознак визначається фасетною формулою.  При застосуванні фасетного методу класифікації слід додержувати таких основних правил:  • ознаки, які використовуються в різних фасетах, не повинні повторюватися (принцип взаємного виключення фасетів);  • із усіляких ознак, які характеризують множину об'єктів класифікації, відбираються і фіксуються лише істотні, які забезпечують розв'язування конкретних економічних задач.  Фасетний метод класифікації не має недоліків ієрархічного методу. Він особливо ефективний у разі функціонування комп'ютерних інформаційних систем. |

3. **Побудова алгоритму LA(1)-аналізу**

**1. Правила побудови**

Нехай *G*=(*X*, *N*, *P*, *S*) – LA(1)-граматика без  -правил, можливо, розширена. Опишемо побудову програми синтаксичного аналізу слів мови *L*(*G*). Програма буде містити процедури, іменами яких є відповідні їм нетермінали граматики.

Процедура, відповідна нетерміналу *A*, описує аналіз ланцюжків, вивідних із *A*. Цими ланцюжками є слова мови або їхні підслова. Алгоритм процедури такий. Нехай *A w*1|…|*wk* – усі продукції з нетерміналом *A* ліворуч, *a*1*a*2…*an* – ланцюжок, початок якого треба виводити з *A*. Спочатку визначається, якій із множин first(*w*1), … , first(*wk*) належить символ *a*1. Нехай нею буде first(*w*1), і в найпростішому випадку *w*1=*Y*1*Y*2…*Ym*, де *Yi* – термінал або нетермінал. Початок ланцюжка має виводитися з *Y*1.

Якщо *Y*1 – термінал, то перевіряється рівність *a*1=*Y*1.

Якщо *Y*1 – нетермінал, то з *a*1 починається частина слова, вивідна з *Y*1, і для аналізу початку ланцюжка *a*1*a*2… викликається процедура *Y*1.

В обох випадках, після перевірки рівності або повернення з виклику *Y*1,за деякого *j* 2 початок непроаналізованої частини ланцюжка *ajaj*+1… повинен виводитися з *Y*2 тощо. Перший символ непроаналізованої частини ланцюжка називатимемо ***поточним***.

Отже, за правими частинами *wi* продукцій будуються фрагменти процедури *A*; вони виконуються, коли поточний символ ланцюжка міститься у відповідній множині first ( *wi* ).

Зробимо уточнення програми та правил побудови процедур. Нехай *w* – слово, що аналізується, ch – його поточний символ, функція getc задає добування наступного символу слова, змінна finch позначає спеціальний символ, що повертається функцією getc після закінчення слова *w*. Нехай ok – бульова змінна, що є ознакою належності *w L*(*G*), а процедура error задає присвоювання ok:=**false**. Тілом програми є

**begin**

ok := **true**;

ch := getc;

S; { виклик процедури, відповідної }

{ головному нетерміналу }

writeln ( (ch = finch) **and** ok )

**end**.

Нехай *A* є нетерміналом із продукціями *A w*1|…|*wk* , а *S*1,…, *Sk* позначають множини first(*w*1),…,first(*wk*), які не перетинаються. За таких умов тілом процедури *A* є складений оператор

**begin**

**if** ch **in** S1 **then** *оператор-для-w1* **else**

…

**if** ch **in** S*k* **then** *оператор-для-wk* **else**

error

**end**

Зокрема, якщо *Si* містить лише один символ *x*, то замість умови ch**in***Si* можна записати ch = *x*.

Праві частини розширених граматик є виразами, складеними з послідовностей символів алфавіту *X* і метасимволів, якими є дужки (), [], {} та символи |. Розглянемо праву частину *v* розширеного правила як послідовність виразів *Y*1 … *Yk* , в якій *Yi* є або символом з *X N*, або виразом вигляду (*u*), [*u*], чи {*u*}, що не міститься всередині інших дужок, де *u* – послідовність нетерміналів, терміналів и дужок. За правою частиною *v* будується складений оператор із послідовністю операторів, відповідних до *Y*1,…,*Yk*. Нехай *Y* позначає один із виразів *Y*1,…,*Yk*. Відповідний оператор визначається виглядом *Y* за наступними правилами.

* Якщо *Y* є першим терміналом *Y*1,то оператором є

ch:=getc.

* Якщо *Y* є терміналом, але не першим у ланцюжку *v*,то оператор має вигляд

**if** ch = *Y* **then** ch:=getc **else** error,

тобто треба перевірити збігання поточного символу з *Y* та перейти до наступного символу.

* Якщо *Y* є нетерміналом, то оператором є виклик процедури

Y.

* Якщо *Y* має вигляд (*u*1|…|*um*) і *Ti* позначає first(*ui*) при *i*=1,…,*m*, то треба визначити, до якої з множин *Ti* належить поточний символ, і виконати оператор, відповідний до *ui*:

**if** ch **in** *T*1 **then** *оператор-для-u1* **else**

…

**if** ch **in** *Tm* **then** *оператор-для-um* **else**

error.

* Якщо *Y* має вигляд [*u*], *T*=first(*u*), то за виконання умови ch *T* треба виконати оператор, відповідний до *u*:

**if** ch **in** *T* **then** *оператор-для-u*.

* Якщо *Y* має вигляд {*u*}, *T*=first(*u*), то за виконання умови ch *T* треба повторювати виконання оператора, відповідного до *u*:

**while** ch **in** T **do** *оператор-для-u*.

Зокрема, коли ланцюжок *u* починається терміналом, тобто *u*=*xu*1, де *x X*, то цикл має вигляд

**while** ch = *x* **do**

**begin**

ch := getc;

*оператор-для-u1*

**end**.

Оператори, відповідні до *u*, *u*1, … , *um*, записуються за цими ж правилами.

**2. Побудова аналізатора арифметичних виразів**

Розширена LA(1)-граматика *G*01 із продукціями *E T*{+*T*}, *T F*{\**F*}, *F* (*E*)|*a* породжує мову арифметичних виразів. Згідно з наведеними правилами запишемо процедури E, T, F:

**procedure** E;

**begin**

T;

**while** ch = '+' **do**

**begin** ch := getc; T **end**

**end**;

**procedure** T;

**begin**

F;

**while** ch = '\*' **do**

**begin** ch := getc; F **end**

**end**;

**procedure** F;

**begin**

**if** ch = '(' **then**

**begin**

ch := getc; E;

**if** ch = ')' **then** ch := getc

**else** error

**end**

**else**

**if** ch = 'a' **then** ch := getc

**else** error

**end**

Побудовані процедури ***взаємно рекурсивні***: тіло E містить виклики процедури T, тіло T – виклики F, а тіло F – виклики E. У мові Паскаль кожне ім'я повинно бути означеним вище від його вживання, тому незрозуміло, в якій послідовності треба записати процедури E, T, F. У таких випадках використовують ***конструкцію forward*** .

Якщо в програмі є взаємно рекурсивні підпрограми, то за правилами мови Паскаль спочатку в блоці охоплюючої їх програми (підпрограми) записуються *лише* *заголовки* кількох із них (зокрема, однієї), *а замість їх блоків пишеться слово* ***forward***, тобто, "попереду". Решту підпрограм розміщують так, щоб вони містили виклики підпрограм, чиї заголовки (разом із блоком чи словом **forward**) уже записано вище. Підпрограми, записані спочатку без блоку, розміщаються в кінці зі ***скороченим заголовком*** вигляду

**procedure** <ім'я>; або **function** <ім'я>.

*Список параметрів, дужки й тип функції в скороченому заголовку відсутні*. У даному прикладі процедури E, T, F не мають параметрів, тому скорочені заголовки не відрізняються від повних.

Запишемо програму аналізу арифметичних виразів, вважаючи, що вираз набирається на клавіатурі, а читання його символів задається процедурою getc із модуля Inbuf (розділ 20):

**program** Aexan ( input, output );

**uses** Inbuf;

**var** ch : char;

ok : boolean;

**procedure** error;

**begin** ok := false; ch := finch **end**;

**procedure** E; { тут повний заголовок }

**forward**;

**procedure** F;

… E … { виклик процедури E }

**end**;

**procedure** T;

… F … { виклик процедури F }

**end**;

**procedure** E; { тут скорочений заголовок }

… T … { виклик процедури T }

**end**;

**begin**

ok := **true**; ch := getc;

E; { виклик процедури, відповідної до }

{ головного нетермінала }

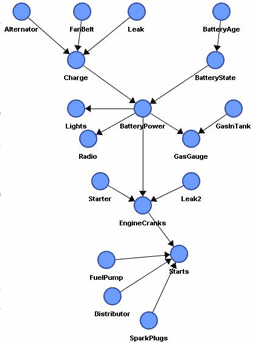
writeln ( (ch = finch) **and** ok )

**end**.

Як бачимо, всі виклики посилаються на процедури, чиї імена вже означено раніше.

Уживання взаємно рекурсивних підпрограм інколи називається ***непрямою рекурсією***.

**4. Метод Байеса (Naive Bayes)**



Метод Байєса це простий класифікатор , заснований на ймовірнісної моделі, що має сильне припущення незалежності компонент вектора ознак [ 95 , 96]. Зазвичай це допущення не відповідає дійсності і тому одна з назв методу - Naıve Bayes ( Наївний Байес ) .

Імовірнісна модель методу заснована на відомій формулі Байєса по обчисленню апостеріорної ймовірності гіпотез . Застосовуючи цю формулу для задачі класифікації текстів , отримаємо ймовірність того , що документ належить категорії :

Так як знаменник не залежить від рубрики і є константою , на практики його скорочують. Грунтуючись на цьому , отримаємо формулу для визначення належності документа до рубриках:

Умовна ймовірність обчислюється як :

Для полегшення завдання обчислення цієї ймовірності припустимо незалежність компонент вектора ознак . тоді :

Як і всі імовірнісні класифікатори , класифікатор , заснований на методі Байєса , правильно класифікує документи , якщо відповідний документом клас більш ймовірний, ніж будь-який інший . У цьому випадку формула для визначення найбільш вірогідною категорії прийме наступний вигляд:

Припустимо , що класифікатор складається з рубрик і може бути виражена через параметрів . Тоді відповідний алгоритм Байеса для класифікації тексту матиме параметрів . Але на практиці , найчастіше за все (випадок бінарної класифікації) і . Тому , число параметрів для методу Байєса зазвичай одно, де - розмірність вектора ознак .

Наївний класифікатор Байєса має кілька властивостей , які роблять його надзвичайно корисним практично , незважаючи на те , що сильні припущення незалежності часто порушуються. Цей метод показує високу швидкість роботи і досить високу якість класифікації [ 91 , 96]. Його можна рекомендувати для побудови класифікатора , коли існую жорсткі обмеження на час рахунку і скористатися більш точними методами , не представляється можливі.

Формула Байєса:  
P(A|B) = \frac{P(B | A)\, P(A)}{P(B)}     де  
  
         P (A) - апріорна ймовірність гіпотези A (сенс такої термінології див. нижче);  
         P (A | B) - ймовірність гіпотези A при настанні події B (апостериорная імовірність);  
         P (B | A) - ймовірність настання події B при істинності гіпотези A;  
         P (B) - повна ймовірність настання події B.

Формула Байєса випливає з визначення умовної ймовірності. Можливість спільного події  AB двояко виражається через умовні ймовірності.

 P(AB) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A) відповідно

P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} =  \frac{P(B | A)\, P(A)}{P(B)}

Обчислення P(B)

У завданнях і статистичних додатках P (B) зазвичай обчислюється за формулою повної ймовірності події, залежного від декількох несумісних гіпотез, що мають сумарну ймовірність 1.

P(B)=\sum_{i=1}^N P(A_i)P(B|A_i)

де ймовірності під знаком суми відомі або допускають експериментальну оцінку.  
  
У цьому випадку формула Байєса записується так:

P(A_j|B) = \frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum_{i=1}^N P(A_i)P(B|A_i)}

« Фізичний сенс » і термінологія

Формула Байєса дозволяє « переставити причину і наслідок » : за відомим фактом події обчислити вірогідність того , що воно було викликане даної причиною .

Події , що відображають дію «причин » , в даному випадку називають гіпотезами , оскільки вони - передбачувані події, що спричинили дане. Безумовну ймовірність справедливості гіпотези називають апріорної ( наскільки ймовірна причина взагалі ) , а умовну - з урахуванням факту події події - апостеріорної ( наскільки ймовірна причина виявилася з урахуванням даних про подію ) . И або допускають експериментальну оцінку.

***5. Метод дерева рішень*** передбачає графічну побудову різних варіантів дій, які можуть бути здійснені для вирішення існуючої проблеми

***Компоненти графіку*** “дерева рішень”: ***три поля***, які можуть повторюватися в залежності від складності самої задачі: а) *поле дій* (поле можливих альтернатив). Тут перераховані всі можливі альтернативи дій щодо вирішення проблеми; б) *поле можливих подій* (поле ймовірностей подій). Тут перелічені можливі ситуації реалізації кожної альтернативи та визначені імовірності виникнення цих ситуацій; в) *поле можливих наслідків* (поле очікуваних результатів). Тут кількісно охарактеризовані наслідки (результати), які можуть виникнути для кожної ситуації; ***три компоненти***: а) *перша точка прийняття рішення*. Вона звичайно зображена на графіку у вигляді чотирикутника та вказує на місце, де повинно бути прийнято остаточне рішення, тобто на місце, де має бути зроблений вибір курсу дій; б) *точка можливостей*. Вона звичайно зображується у вигляді кола та характеризує очікувані результати можливих подій; в) "гілки дерева". Вони зображуються лініями, які ведуть від першої точки прийняття рішення до результатів реалізації кожної альтернативи.

Ідея методу "дерева рішень" полягає у тому, що просуваючись гілками дерева у напрямку справа наліво (тобто від вершини дерева до першої точки прийняття рішення):а) спочатку розрахувати очікувані виграші по кожній гілці дерева; б) порівнюючи ці очікувані виграші, зробити остаточний вибір найкращої альтернативи.

Використання цього методу передбачає, що вся необхідна інформація про очікувані виграші для кожної альтернативи та імовірності виникнення всіх ситуацій була зібрана заздалегідь.

Метод "дерева рішень" застосовують на практиці у ситуаціях, коли результати одного рішення впливають на подальші рішення, тобто, для прийняття послідовних рішень.

**6. Узагальнена методика математичного моделювання**

Математичне моделювання можна розглядати як засіб вивчення реальної системи шляхом її заміни зручнішою для експериментального дослідження системою (моделлю), що зберігає істотні риси оригінала. При моделюванні здійснюється апроксимація функції опису більш простою і зручною для практичного аналізу функцією – моделлю.

Математичні моделі, особливо ті, що використовують чисельні методи, потребують для свого створення значних інтелектуальних, фінансових та часових затрат. Тому рішення про створення нової моделі приймається лише в разі відсутності більш простих шляхів вирішення поставленої проблеми (наприклад, модифікації однієї з існуючих моделей).

Дослідження об'єкту моделювання і складання його математичного опису полягають у встановленні зв'язків між характеристиками процесу, виявленні його граничних і початкових умов та формалізації процесу у вигляді системи математичних співвідношень.

Процес побудови будь-якої математичної моделі можна представити послідовністю етапів, зображених на рис. 1.1.

**7. Методи розв’язання нелінійних рівнянь**

Задача знаходження коренів нелінійних [рівнянь](http://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D1%96%D0%B2%D0%BD%D1%8F%D0%BD%D0%BD%D1%8F) одна з найважливіших для практики задач математики.

Дійсне рівняння з однією дійсною змінною можна записати у вигляді

F(x)=0 ,

де  F(x) - певна функція.

Значення змінної *x*, що задовольняють цьому рівнянню називаються його коренями.

Корені рівнянь не часто можна знайти точно. Здебільшого на практиці задача зводиться до приблизного знаходження кореня, тобто виділення такого достатньо вузького інтервалу  [x_1, x_2] , про який можна сказати, що корінь рівняння належить цьому інтервалу.

Доволі часто, особливо при якісному аналізі задачі, важливо встановити простий факт існування кореня.

**Нелінійні методи**

Для підвищення точності розрахунків часто застосовують нелінійну апроксимацію. У випадку обчислення інтегралу необхідно підбирати таку апроксимуючу функцію, щоб її інтеграл можна було точно обчислити, інакше наближення не буде мати сенсу. Тому при застосуванні апроксимації намагаються відшукати вирівнюючі змінні, у яких вже два вільні параметри забезпечували б задовільне наближення. Для досягнення цієї мети відрізок інтегрування http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image121.gif розбивають на підінтервали (вводять сітку), і на кожному частковому інтервалі функцію заміщують її нелінійним наближенням, параметри якого виражаються через табличні значення функції.

У випадку функцій, які близькі до експоненти, застосувавши для вирівнювання інтерполяційний многочлен Ньютона, будемо мати:

http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image328.gif.

Проінтегрувавши на кожному частковому відрізку замість функції http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image329.gif її наближене значення, отримаємо квадратурну формулу:

http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image330.gif.

Зрозуміло, що наведена квадратурна формула дає хороший результат лише для експоненціальних функцій.

Для побудови наближення часто застосовують інтерполяційний многочлен Лагранжа, який будується для кожного часткового інтервалу окремо, і для виведення квадратурних формул застосовують методи типу середніх (формули Сімпсона або Гаусса не використовують, тому що вони дають досить складний результат).

Інтегрування на змінному проміжку

При обчисленні інтегралу http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image331.gif для кожного конкретного значення змінної http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image021.gif його можна розглядати як інтеграл з постійними межами і застосовувати описані вище методи. Якщо інтеграл необхідно визначити для великої кількості значень http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image021.gif, то доцільно вибрати сітку і за допомогою високоточних методів інтегрування скласти таблицю значень інтеграла на цій сітці, тоді

,

де інтеграл можна обчислювати за простими формулами.

Інтегрування функцій на нескінченному інтервалі

Якщо ваговий коефіцієнт http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image333.gif у формулі (1), то для таких випадків існують спеціальні формули інтегрування на нескінченному інтервалі.

Для інтервалу http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image334.gif справедливою є формула:

http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image335.gif,                               (2)

де коефіцієнти http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image336.gif і http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image337.gif та похибки відповідних усікань визначені у табл. 1.

Таблиця 1

Коефіцієнти http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image336.gif і http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image337.gif квадратурної формули (2)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image336.gif | http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image337.gif | похибка |
| 0,585786  3,414214 | 0,853553  0,146447 | http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image338.gif |
| 0,415775  2,294280  6,289945 | 0,711093  0,278518  0,010389 | http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image339.gif |
| 0,322548  1,745761  4,536620  9,395071 | 0,603154  0,357419  0,038888  0,000539 | http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image340.gif |
| 0,263560  1,413403  3,596426  7,085810  12,640801 | 0,521759  0,398667  0,075942  0,003612  0,000023 | http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image341.gif |

Для вагових коефіцієнтів http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image342.gif існує формула чисельного інтегрування на нескінченному проміжку http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image343.gif:

http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image344.gif.                                  (3)

Відповідні коефіцієнти http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image345.gif і http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image346.gif та похибки відповідних усікань визначені у таблиці 2 (http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image347.gif – деяке дійсне число).

Таблиця 2

Коефіцієнти http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image336.gif і http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image337.gif квадратурної формули (3)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image348.gif | похибка |
| ±0,707107 | 0,886227 | http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image349.gif |
| 0  ±1,224745 | 1,181636  0,295409 | http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image350.gif |
| ±0,524648  ±1,650680 | 0,804914  0,081313 | http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image351.gif |
|  | 0,945309  0,393619  0,019953 | http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image352.gif |

Наприклад, для http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image353.gif

http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image354.gif.

Інтегрування функцій з розривами на кінцях інтервалу

Якщо підінтегральна функція на кінцях інтервалу інтегрування має розриви (набуває нескінченно великих значень порядку 0,5 відносно величин http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image355.gif і http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image356.gif), то за допомогою лінійного перетворення переходять до  інтервалу http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image357.gif і застосовують формулу:

http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image358.gif,

похибка якої складає http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image359.gif, де http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image360.gif.

Якщо функція має особливість лише відносно одного краю інтервалу інтегрування http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image355.gif, то доцільно спочатку позбутися цієї особливості за допомогою відповідних перетворень, а потім виконувати чисельне інтегрування:

http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image361.gif,

або, поклавши http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image362.gif, отримаємо:

http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image363.gif.

Кратні інтеграли

Метод прямокутників

В основі методу прямокутників лежить геометричний зміст визначеного інтеграла, як і в аналогічному методі для звичайного інтеграла.

Розглянемо подвійний інтеграл, заданий на прямокутнику http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image364.gif. Розіб’ємо область інтегрування на однакові прямокутнички (покриємо підінтегральну функцію сіткою). В ролі значення функції можна взяти її значення в середині прямокутничка, і тоді інтеграл можна наближено обчислити за формулою:

http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image365.gif,                             (4)

|  |  |
| --- | --- |
| |  | | --- | | Y | |

де http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image366.gif – площа http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image367.gif-го прямокутничка, http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image368.gif – координати точки, що знаходиться всередині відповідного прямокутничка http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image369.gif, http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image370.gif (рис. 6).

|  |
| --- |
|  |
|  | http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image371.gif |

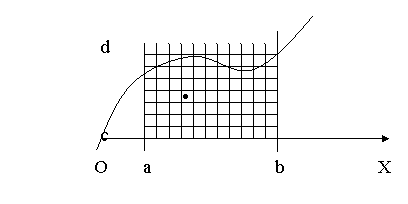


Рис. 6. Покриття площі криволінійної трапеції сіткою

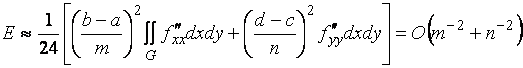
Формула (4) є точною для будь-якої лінійної функції (є апроксимаційною формулою поверхні площиною). Якщо підінтегральну функцію розкласти в ряд Тейлора, отримаємо:

http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image373.gif,

де http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image374.gif, http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image375.gif, а всі похідні беруться в точці центра прямокутничка. Підставивши розкладення у квадратурну формулу, отримаємо оцінку похибки:

http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image376.gif

(всі непарні члени ряду відносно центру симетрії скорочуються). Якщо область розбита на http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image377.gif та http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image378.gif частин відповідно по осі http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image379.gif та http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image380.gif, то узагальнена формула похибки обчислення інтеграла буде мати вигляд:

.

Видно, що формула похибки має другий порядок точності, отже є точною для будь-якої лінійної функції (апроксимує поверхню деякою площиною).

Послідовне інтегрування

Прямокутна область. Розглянемо інтеграл, заданий на прямокутній області, що розбита сіткою на окремі прямокутнички. Такий інтеграл можна обчислити, послідовно інтегруючи його за кожню змінною:

http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image382.gif, де http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image383.gif.

Для обчислення кожного простого інтеграла можна застосовувати квадратурні формули. Послідовне інтегрування у двох напрямках приводить до кубатурних формул, які є прямим добутком одномірних квадратурних формул:

http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image384.gif, http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image385.gif,

або

http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image386.gif, де http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image387.gif.

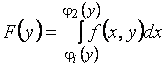
У загальному випадку для різних напрямків можна використовувати квадратурні формули різних порядків точності. Тоді головний член похибки можна представити як http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image388.gif, де http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image327.gif і http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image389.gif – порядки точності відповідних квадратурних формул. Цей факт необхідно враховувати у разі застосування методу Рунге-Ромберга: при зменшенні кроку сітки необхідно, щоб відношення http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image390.gif лишалось постійним. Якщо http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image391.gif, то дотриматись виконання цієї умови непросто, тому бажано для всіх напрямків використовувати квадратурні формули однакового порядку точності.

Якщо за кожним напрямком вибрати квадратурну формулу трапецій і рівномірну сітку, то вагові коефіцієнти http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image392.gif будуть дорівнювати 1, http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image393.gif, http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image394.gif відповідно для внутрішніх, зовнішніх та кутових вузлів сітки; для двічі неперервно диференційовних функцій ця формула буде мати другий порядок точності, і до неї можна застосовувати процедуру Рунге-Ромберга.

Можна підібрати вагові коефіцієнти та сітку таким чином, щоб кожна одномірна квадратурна формула була точною для многочлена максимальної степені, іншими словами – була формулою Гаусса, де

http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image395.gif, http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image396.gif, http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image397.gif, http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image398.gif, http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image399.gif – нулі многочлена Лежандра і відповідні ваги. Ці формули розраховані на досить гладкі функції і дають для них високий степінь точності для невеликої кількості вузлів.

Довільна область. Розглянемо послідовне інтегрування на довільній області. Для цього покриємо область прямими лініями і розставимо на них вузли (рис. 6). Інтеграл представимо як:

http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image400.gif, де 

Спочатку обчислимо інтеграл вздовж осі http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image402.gif для кожної лінії, застосовуючи деяку вибрану квадратурну формулу. Потім будемо обчислювати інтеграл по http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image088.gif, і за вузли будемо брати проекції наших ліній на вісь http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image403.gif.

При обчисленні інтеграла по http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image088.gif необхідно враховувати, що якщо область обмежена гладкою кривою, то при http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image404.gif (http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image405.gif) довжина лінії не лінійно (як http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image406.gif) буде прямувати до нуля, отже в околі цієї точки http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image407.gif, а отже використовувати для інтегрування http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image408.gif формули високої точності недоцільно. На практиці з http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image408.gif виділяють основну особливість у вигляді вагового коефіцієнта http://manualsem.com/pictures/books/chiselni-metodi-rozvyazannya-nelinijnix-rivnyan-ta-sistem-rivnyan.files/image409.gif, якому відповідають ортогональні многочлени Чебишова другого роду, і друге інтегрування виконується за формулами Гаусса-Крістоффеля:

**8. Метод опорних векторів ( англ. SVM , support vector machine )** - набір схожих алгоритмів виду «навчання з учителем » , що використовуються для задач класифікації та регресійного аналізу . Цей метод належить до сімейства лінійних класифікаторів . Він може також розглядатися як спеціальний випадок регуляризації по А. Н. Тихонову . Особливою властивістю методу опорних векторів є безперервне зменшення емпіричної помилки класифікації і збільшення зазору. Тому цей метод також відомий як метод класифікатора з максимальним зазором .  
  
Основна ідея методу опорних векторів - переведення вихідних векторів у простір більш високої розмірності і пошук розділяє гіперплощини з максимальним зазором в цьому просторі. Дві паралельні гіперплощини будуються по обидва боки гіперплощини , що розділяє наші класи . Розділяє гіперплощиною буде гіперплощина , максимізують відстань до двох паралельних гіперплоскостей . Алгоритм працює в припущенні , що чим більше різниця або відстань між цими паралельними гіперплощинами , тим менше буде середня помилка класифікатора .

ПОСТАНОВКА ЗАВДАННЯ  
Кілька классифицирующих розділяють прямих ( гіперплоскостей ) . Але тільки одна досягає оптимального поділу  
  
Часто в алгоритмах машинного навчання виникає необхідність класифікувати дані . Кожен об'єкт даних представлений як вектор ( крапка) в p -вимірному просторі ( послідовність p чисел). Кожна з цих точок належить тільки одному з двох класів . Нас цікавить , чи можемо ми розділити точки гіперплощиною розмірністю ( p -1). Це типовий випадок лінійної разделимости . Таких гіперплоскостей може бути багато. Тому цілком природно вважати, що максимізація зазору між класами сприяє більш впевненою класифікації . Тобто чи можемо ми знайти таку гіперплощина , щоб відстань від неї до найближчої точки було максимальним. Це б означало , що відстань між двома найближчими точками , що лежать по різні сторони гіперплощини , максимально . Якщо така гіперплощина існує , то вона нас буде цікавити найбільше ; вона називається оптимальною розділяє гіперплощиною , а відповідний їй лінійний класифікатор називається оптимально розділяє класифікатором .

 Формальний опис завдання  
  
Ми вважаємо , що точки мають вигляд ::  
  
\{ (\mathbf{x}_1, c_1), (\mathbf{x}_2, c_2), \ldots, (\mathbf{x}_n, c_n)\}  
де ci приймає значення 1 або -1 , залежно від того , якого класу належить точка \mathbf{x}_i . Кожне  \mathbf{x}_i  - це p - мірний речовинний вектор , зазвичай нормалізований значеннями [ 0,1] або [ -1,1 ] . Якщо крапки не будуть нормалізовані , то точка з великими відхиленнями від середніх значень координат точок занадто сильно вплине на класифікатор . Ми можемо розглядати це як навчальну колекцію , в якій для кожного елемента вже заданий клас , до якого він належить. Ми хочемо , щоб алгоритм методу опорних векторів класифікував їх таким же чином. Для цього ми будуємо розділяє гіперплощина , яка має вигляд:  
Оптимальна розділяє гіперплощина для методу опорних векторів , побудована на точках із двох класів . Найближчі до паралельних гіперплощинами точки називаються опорними векторами  
\mathbf{w}\cdot\mathbf{x} - b=0.

Вектор \mathbf{w}- перпендикуляр до розділяє гіперплощини . Параметр b дорівнює за модулем віддалі від гіперплощини до початку координат. Якщо параметр b дорівнює нулю , гіперплощина проходить через початок координат , що обмежує рішення .  
  
Так як нас цікавить оптимальний поділ , нас цікавлять опорні вектора і гіперплощини , паралельні оптимальною і найближчі до опорних векторах двох класів . Можна показати , що ці паралельні гіперплощини можуть бути описані такими рівнянням ( з точністю до нормування) .  
\mathbf{w}\cdot\mathbf{x} - b=1,

\mathbf{w}\cdot\mathbf{x} - b=-1.

Якщо навчальна вибірка лінійно роздільна , то ми можемо вибрати гіперплощини таким чином , щоб між ними не лежала жодна точка навчальної вибірки і потім максимізувати відстань між гіперплощинами . Ширину смуги між ними легко знайти з міркувань геометрії , вона дорівнює \frac{2}{\|\mathbf{w}\|} , таким чином наше завдання мінімізувати \|\mathbf{w}\|| . Щоб виключити всі точки зі смуги , ми повинні переконатися для всіх i , що  

\left[\begin{array}{lcr}
\mathbf{w}\cdot\mathbf{x_i} - b \ge 1,\ c_i=1\mathrm{}\\
\mathbf{w}\cdot\mathbf{x_i} - b \le -1,\ c_i=-1\mathrm{}\\
\end{array}\right. 


Це може бути також записано у вигляді :  
c_i(\mathbf{w}\cdot\mathbf{x_i} - b) \ge 1, \quad 1 \le i \le n.\qquad\qquad(1)

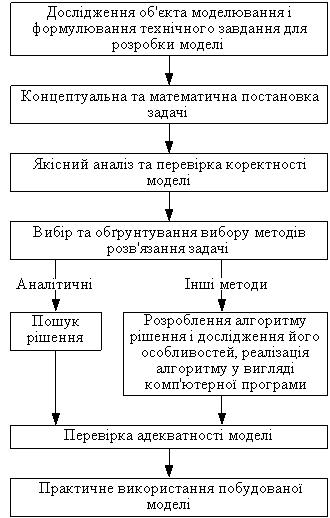


Рисунок 1.1 – Послідовність етапів побудови математичної моделі

На етапі *дослідження об’єкта моделювання* потрібно виконати наступні дії:

  аналіз взаємодії об’єкта з зовнішнім середовищем, виділення характеристик вхідних впливів та реакції об’єкту, класифікація їх на вимірні та невимірні, керуючі та перешкоди;

  проведення декомпозиції та дослідження внутрішньої структури об’єкту;

  дослідження порядку функціонування об’єкту, виявлення зв’язку між входом та виходом, формування множини станів об’єкту;

  збір та перевірка існуючих експериментальних даних про об’єкти-аналоги, проведення, при необхідності, додаткових експериментів;

  класифікація об’єкта моделювання на стаціонарний чи нестаціонарний, визначення міри впливу випадкових факторів на об’єкт та порядку нелінійності зв’язків між характеристиками об’єкту;

  аналітичний огляд літературних джерел, аналіз та порівняння побудованих раніше моделей подібних об’єктів;

  аналіз та узагальнення всього накопиченого матеріалу, розроблення загального плану створення математичної моделі.

В деяких випадках дослідження внутрішньої будови та порядку функціонування об’єкта моделювання неможливе або економічно недоцільне. Тому можливо розглядати об’єкт як „чорний ящик”, стосовно якого нам відомі лише його входи та виходи.

На підставі аналізу об’єкту моделювання формується змістовна постановка моделювання, в якій мають бути зазначені:

  мета моделювання;

  тип моделі;

 вимоги до адекватності моделі та якості розв’язку.

Тип моделі має відповідати результатам класифікації об’єкта моделювання, інакше модель навряд чи буде адекватною.

Весь накопичений в результаті дослідження матеріал, змістовна постановка задачі моделювання, додаткові вимоги до реалізації моделі, оформлюються у вигляді технічного завдання на проектування та розробку моделі.

Концептуальна постановка задачі моделювання – це сформульований в термінах конкретних дисциплін (фізики, хімії, біології тощо) список основних питань, а також сукупність гіпотез відносно особливостей та поведінки об’єкта моделювання. Розробник моделі на підставі результатів аналізу об’єкта моделювання формує своє бачення стосовно процесів на об’єкті і формулює його на природній мові в термінах предметної області. При цьому з метою спрощення моделі він приймає низку припущень та обмежень. Припущення можуть містити нехтування певними процесами або зміну характеру їх протікання. Концептуальна модель має пройти погодження з експертами по даній предметній області з метою перевірки на адекватність. Адекватність концептуальної моделі визначає адекватність математичної моделі, яка формується на її основі.

Математична постановка задачі моделювання – це сукупність математичних співвідношень, які описують поведінку та характеристики об’єкта моделювання. Необхідно формалізувати змінні моделі та зв’язки між ними. Математичний опис моделі складається на основі законів фізики, хімії тощо, які характеризують динаміку і статику процесів в досліджуваному об'єкті, і виражається на мові будь-яких розділів математики. Найбільше поширення при побудові детермінованих моделей набули алгебраїчні рівняння та системи, звичайні диференціальні рівняння і диференціальні рівняння в частинних похідних, матрична алгебра, а при стохастичному моделюванні і методи теорії імовірності, математичної статистики та теорії випадкових процесів. Якщо апріорні відомості про об'єкт недостатні, вигляд математичних моделей уточнюється за допомогою методів багатовимірної статистики: регресійного, кореляційного, багатофакторного і інших аналізів, а також проведення пасивного або планування активного експериментів. Для більшості складних об’єктів структура моделі містить параметри, які відображають особливості конкретних об’єктів. Пошук значень цих параметрів відбувається за допомогою методів параметричної ідентифікації на основі проведення пасивного або активного експериментів.

Поняття коректності задачі має важливе значення в процесі моделювання. Адже, наприклад, чисельні методи розв’язку задач доцільно застосовувати лише до коректно поставлених задач. При цьому, не всі практичні задачі можна вважати коректними. Математична модель є *коректною*, якщо для неї отримано позитивний результат по всіх контрольних перевірках: розмірності, порядку, характеру залежностей, граничних умов, фізичного сенсу тощо.

Для математичної моделі обирається один з методів розв’язку, який дозволяє при заданих значеннях вхідних змінних отримати значення вихідних змінних. Вибір методу обгрунтовується на підставі властивостей моделі, даних про точність вимірювання значень змінних, вимог до точності та швидкості отримання розв’язку.

Необхідною умовою для переходу від дослідження об’єкта до дослідження моделі і подальшого перенесення результатів на об’єкт моделювання є вимога адекватності моделі об’єкту. *Адекватність –* це відтворення моделлю з необхідною повнотою всіх властивостей об’єкта, важливих для цілей даного дослідження. Як правило, адекватність моделі визначається на підставі статистичних оцінок розбіжностей значень вихідних змінних моделі та об’єкту при однакових значеннях вхідних змінних, розрахованих за результатами серії експериментів на об’єкті моделювання. Для перевірки адекватності моделі використовуються дані іншої серії експериментів, ніж для параметричної ідентифікації. Відмінність значень виходу моделі та об’єкту може бути обумовлена наступними причинами:

  спрощеність моделі;

  похибка чисельних методів;

  похибка вимірювальних пристроїв;

 обчислювальна похибка, пов’язана з переходом між десятичною і двійковою системами числення та особливостями комп’ютерних обчислень.

Якщо модель не задовольняє критеріям адекватності, необхідно крок за кроком перевірити коректність розробки на всіх етапах:

  умови проведення експерименту та правильність вимірювання і фіксування його результатів;

  правильність програмної реалізації алгоритмів;

  адекватність результатів параметричної ідентифікації;

  обгрунтованість вибору методу розв’язку моделі;

  коректність математичного опису явищ та характеристик об’єкту;

 адекватність концептуальної моделі.

Після успішної перевірки адекватності модель може бути застосована в задачах прогнозу та дослідження об’єкта.

Метод математичного моделювання дозволяє виключити необхідність виготовлення громіздких фізичних моделей, пов'язаних з матеріальними витратами; скорочувати час визначення характеристик (особливо при розрахунку математичних моделей на комп’ютері і вживанні ефективних обчислювальних методів і алгоритмів); вивчати поведінку об'єкту моделювання при різних значеннях параметрів; аналізувати можливість застосування різних елементів; отримувати характеристики і показники, які складно отримувати експериментально (кореляційні, частотні, параметричної чутливості).